Master 2 de Mathématiques **Année 2023-2024**
Université de Nantes

Master 2 *Mathématiques Fondamentales et Applications*

(english version below)

Le responsable du Master 2 *Mathématiques Fondamentales et Applications* est

Erwan Brugallé erwan.brugalle@math.cnrs.fr

Le M2 s'organise autour des deux parcours :
- Algèbre et Géométrie
- Analyse et Probabilités

Chaque étudiant doit valider les trois cours communs et quatre cours spécialisés. Les cours spécialisés sont à choisir parmi les cinq cours proposés à l'Université de Nantes dans chaque parcours. Il est également possible de choisir jusqu'à deux cours du Master 2 partenaire de l'Université de Rennes (avec des frais de transport éventuels pris en charge par le Centre Henri Lebesgue) et, sous réserve de validation préalable du responsable pédagogique, dans d'autres masters nantais.
Il est possible de suivre plus de cours que nécessaires.

La partie pratique consiste en un stage de 3 mois (à peu près du 1er avril au 30 juin) dans un laboratoire de recherche sous la direction d'un enseignant-chercheur. Le stage peut se dérouler dans un autre laboratoire que le Laboratoire de Mathématiques Jean Leray de Nantes. La recherche du stage commence généralement début janvier et est orientée par le responsable du M2. Ce stage se termine par la remise d'un rapport et une soutenance d'une demi-heure.

Une réunion de rentrée aura lieu à l'Université de Rennes fin août/début septembre 2023. Elle sera l'occasion de présenter tous les cours du premier semestre et de choisir les cours suivis. Un départ de Nantes sera organisé vers 9h30.

Master 2 de Mathématiques **Année 2023-2024**
Université de Nantes

Master 2 *Fundamental Mathematics and Applications*

The 2nd year of our Master in Fundamental Mathematics is chaired by

Erwan Brugallé erwan.brugalle@math.cnrs.fr

This M2 is organised along two thematics :
- Algebra and Geometry
- Analysis and Probability

Students need to take the three common courses, as well as four specialised courses. The latter are to be chosen among the five courses proposed at Nantes University within each theme. Student may also choose to take up to two courses taught at the Master 2 of Rennes 1 University (the Centre Henri Lebesgue will cover the travel fees from Nantes to Rennes). It is possible to attend more lectures than necessary.

A large part of the second semester is devoted to a 3-month research internship (approximately from April 1st to June 30th) leading to the writing of a Master thesis. This internship may take place in another department than the Laboratoire de Mathématiques Jean Leray in Nantes.

An opening meeting will take place at Rennes University on end f August/beginning of September 2023, during which lectures from the first semester will be presented. Students will then choose which courses they will take. A departure from Nantes will be organized at 9h30.

Cours communs (premier semestre)

Differential topology (Hossein Abbaspour)

Résumé : Le but de ce cours est d'introduire, et d'illustrer par de nombreux exemples, les variétés différentielles et les objets associés : champs de vecteurs, formes différentielles, cohomologie de de Rahm.

Abstract : The purpose of this course is to introduce, through many examples, differentiable manifolds and differentiable objects that lives on these : vector fields, differential forms, de Rahm Cohomology.

Applications of Fourier Analysis to PDE (Cristina Benea)

Résumé : Plusieurs équations aux dérivées partielles classiques (equations de Laplace et Poisson, equation de la chaleur, equation des ondes, equation Schrodinger) seront étudiées en utilisant les outils fournis par l'analyse de Fourier. Une grande partie du cours sera consacrée à l'étude des espaces des distributions (ou des fonctions généralisées), aux operations sur ces espaces, et aux espaces des Sobolev. Puis, on s'intéressera à l'existence et l'unicité des solutions pour les equations mentionnées ci-dessus.

Abstract : Several classical partial differential equations (Laplace, Poisson, heat, wave and Schrodinger equations) will be studied from the perspective of Fourier analysis. For this, we will need to introduce the formalism of spaces of distributions (or generalized functions), the associated operations and transformations (among which, the Fourier transform), and Sobolev spaces. With this set of tools, we can address questions regarding the existence and the uniqueness of solutions for the equations mentioned above.

Séminaire des étudiants (Joseph Viola et Vincent Colin)

Parcours Algèbre et Géométrie

Premier semestre

Topologie algébrique (Baptiste Chantraine)

Résumé : Le but du cours sera d'introduire les premiers outils de la topologie algébriques. Nous commencerons par étudier les revêtements des espaces topologiques et leurs transformations. Cela permettra de définir le groupe fondamental. Nous verrons certains outils permettant de calculer celui-ci, notamment le théorème de van Kampen. Ensuite nous introduirons l'homologie singulière des espaces et étudierons leurs aspects fonctorielsl. Cela nous permettra d'aborder certains aspects de base de l'algèbre homologique de base. Nous terminerons par définir l'homologie cellulaire et certaines méthode pour la calculer. Le cours sera illustré par beaucoup d'exemples explicites.

Abstract : The goal of the class is to introduce the first tools of algrebraic topology. We will first study coverings of topological spaces and their transformations. That will allows us to define the fundamental group. We will devellop tools to compute it for instance van Kampen theorem. We will then introduce singular homology of spaces and study its functorial aspects. That will allow us to study some basic aspects of homological algebra. In the end we will define cellular homology and see how to compute it. All classes will be illustrated with lots of explicit examples.

Analyse sur les groupes de Lie – Analysis on Lie Groups (Gilles Carron)

Résumé : Les groupes de Lie sont des variétés équipées d'une loi de groupe différentiable. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SO}(n), \mathrm{SU}(n)$ sont des exemples classiques de groupe de Lie. Ce cours sera l'occasion de traiter de différent sujets : mesure de Haar, théorie des représentations des groupes de Lie compacts, Laplacien sur la sphère et son spectre et aussi des exemples de calcul de cohomologie d'espace homogène.

Abstract : Lie group are manifold endowed with a differentiable structure of group. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SO}(n), \mathrm{SU}(n)$ are classical examples of Lie groups. This course will cover different topics : Haar measure, representation theory of compact Lie groups, Laplacian on the sphere and its spectrum and also some computation of cohomology of homogeneous space.

Reference. Jacques Faraut : Analyse sur les groupes de Lie, CALVAGE MOUNET.

Deuxième semestre

Introduction aux théories de l'homotopie – Introduction to homotopy theories (Sinan Yalin)

Résumé : Le but de ce cours est d'expliquer l'approche moderne des théories de l'homotopie, qui fournit un cadre essentiel aux développements récents de la topologie algébrique ainsi qu'à ses interactions avec certains aspects de la géométrie. Nous verrons comment la compréhension de la notion d'homotopie dans divers contextes (espaces topologiques, ensembles simpliciaux, complexes de chaines…) découle de la théorie des catégorie de modèles, développée par Daniel Quillen dans les années 60-70. Nous présenterons certains des résultats clés et puissants outils de cette théorie. Selon le temps restant, nous illustrerons, en guise de perspectives, leurs applications des sujets de recherches très actifs (théorie de l'homotopie rationnelle, théorie des catégories supérieures, géométrie algébrique dérivée, pour nommer quelques possibilités).

Abstract : The goal of this course is to explain the modern approach of homotopy theories, which provides an essential framework for the recent developments of algebraic topology as well its interactions with certain aspects of geometry. We will see how understanding the notion of homotopy in various contexts (topological spaces, simplicial sets, chain complexes...) follows from model category theory, developped by Daniel Quillen in the 60-70's. We will present some of the key results and powerful tools of this theory. Depending on the remaining time, we will illustrate, as perspectives, how they fit in some very active research topics (rational homotopy, higher category theory, derived algebraic geometry, to name a few possibilities).

Algèbre homologique et théorie des faisceaux – Homological algebra and sheaf theory (Stéphane Guillermou)

Résumé : L'algèbre homologique s'est développée à partir de la topologie algébrique lorsqu'on a commencé à associer un espace topologique des "invariants", ses "groupes d'homologie". Deux espaces homéomorphes ont les mêmes groupes d'homologie ; on obtient donc une façon de voir que des espaces ne sont pas homéomorphes. Le procédé qui à un espace topologique associe son homologie a été formalisé et est utilisé dans d'autres domaines que la topologie. On introduira les techniques de bases de l'algèbre homologique puis un formalisme plus approfondi, la notion de catégorie dérivée. En parallèle ces techniques seront appliquées aux faisceaux sur les espaces topologiques. Un faisceau est la donnée d'un espace vectoriel pour chaque ouvert de l'espace, avec des propriétés calquées sur l'exemple qui à un ouvert associe l'espace des fonctions sur cet ouvert. La cohomologie des faisceaux donne une autre approche des groupes de cohomologie d'un espace. Ce cours aura des liens avec le cours de topologie algébrique.

Abstract : Homological algebra developed from algebraic topology when one began to associate a topological space with "invariants", its "homology groups". Two homeomorphic spaces have the same homology groups ; we thus obtain a way to see that spaces are not homeomorphic. The procedure that to a topological space associates its homology has been formalized and is used in other fields than topology. We introduce the basic techniques of homological algebra and then a more profound formalism, the notion of derived category. In parallel these techniques will be applied to sheaves on topological spaces. A sheaf is the data of a vector space for each open subset of the space, with properties modeled on the example which associates to an open subset the space of functions on this open. The cohomology of sheaves gives another another approach to cohomology groups of a space. This course will have links with the course on algebraic topology.

Références.

— Weibel : An introduction to homological algebra
— The first two chapters of Kashiwara and Schapira : Sheaves on manifolds

Une introduction à la topologie symplectique – An introduction to symplectic topology (Fabio Gironella)

Résumé : La géométrie symplectique est une branche des géométrie et topologie différentielles qui étudie les variétés munie d'une structure symplectique, c'est-à-dire d'une forme différentielle fermée et non-dégénérée. Ce domaine voit son origine dans le formalisme Hamiltonien pour mécanique classique, et a connu une explosion en intérêt au cours des dernières décennies, principalement pour le fait qu'il est caractérise par une interaction non triviale entre les phénomènes géométriques, également appelés "rigides", et les phénomènes topologiques, qu'on appelle aussi "flexibles". Les techniques topologiques sont particulièrement efficaces pour sonder cette interaction, ce qui conduit parfois à qualifier le domaine comme "topologie symplectique", selon le type de techniques utilisées.

Le but du cours est de donner une introduction au domaine en adoptant exactement une perspective topologique. Nous commencerons par des définitions de base, des exemples et des constructions, et nous continuerons en décrivant l'un des principaux outils utilisés pour détecter la rigidité, à savoir les courbes pseudo-holomorphes à la Gromov, en donnant comme application principale le théorème de non-tassement de Gromov.

*Abstract :*Symplectic geometry is a branch of differential geometry and topology studying manifolds equipped with a symplectic structure, i.e. a closed and non-degenerate differential 2-form. It originated from the Hamiltonian formalism describing classical mechanics and it has seen an explosion in interest in the past few decades, mainly due to the very non-trivial interaction between "geometric" phenomena, also called rigid, and topological ones, also called "flexible". Topological techniques are especially very effective to probe this interaction, which leads to sometimes refer to the field as "symplectic topology" depending on the perspective.

The aim of the course is to give an introduction to the field adopting exactly a topological perspective. We will start with basic definitions, examples and constructions, and continue describing one of the main tools used to detect rigidity, namely pseudo-holomorphic curves à la Gromov, giving as a main application Gromov's non-squeezing theorem.

Références.

— McDuff-Salamon, "Introduction to Symplectic Topology".
— McDuff-Salamon, "J-holomorphic curves and symplectic topology".

Parcours Analyse et Probabilités

Premier semestre

Systèmes Hamiltoniens et formes normales (Benoît Grébert)

Résumé : Nous nous intéresserons aux systèmes Hamiltoniens en dimension finie. Il s'agit donc d'EDOs, linéaires ou pas, autonomes ou pas, avec une structure algébrique particulière. Sous des hypothèses de non résonances, cette structure permet de mettre en place des techniques de changement de variables (formes normales) efficaces pour ramener, de manière exacte ou approchée, les dynamiques de l'EDO de départ à celles d'une EDO linéaire à coefficients constants.
Après une brève présentation générale, incluant les notions de structure symplectique, de résonances, d'intégrales premières, de transformations canoniques, nous concentrerons nos efforts sur deux résultats :

— **Forme normale de Birkhoff.** Ici on considère une EDO Hamiltonienne nonlinéaire et autonome. On montrera que, si la partie linéaire est non résonante, les solutions petites de l'EDO nonlinéaire restent proches, pendant des temps très longs, à des solutions de la partie liénaire.

— **Réductibilité.** Ici on considère une EDO Hamiltonienne linéaire mais non autonome (i.e. l'Hamiltonien dépend du temps) et on se placera dans un contexte perturbatif : l'Hamiltonien se décompose en une partie autonome plus une partie petite dépendant du temps de manière quasi-périodique. Nous montrerons que, sous des hypothèses de non résonances sur la partie autonome, on ramène l'EDO non autonome à une EDO autonome via un changement de variables (c'est ce que l'on appelle la réductibilité). Ce résultat généralise un théorème de Gaston Floquet (qui considérait des perturbations périodiques en temps) et sa preuve s'appuie sur des techniques de formes normales de type KAM.

Au second semestre, le cours de J. Bernier envisagera des problèmes similaires mais pour des systèmes en dimension infinie (en particulier des EDPs).

Abstract : We are interested in finite dimensional Hamiltonian systems, that is to say ODEs, linear or not, autonomous or not, with a particular algebraic structure. This structure allows us to set up efficient techniques of change of variables (normal forms) in order to reduce, in an exact or approximate way, the dynamics of the original ODE to those of a linear ODE with constant coefficients.
After a brief general presentation, including the notions of symplectic structure, resonances, first integrals, canonical transformations, we will focus on two results :

— **Birkhoff normal form.** Here we consider a nonlinear autonomous Hamiltonian ODE. It will be shown that, if the linear part is nonresonant, the small solutions of the nonlinear ODE remain close, for very long times, to the solutions of the linear part.

— **Reductibility.** Here we consider a linear but non-autonomous Hamiltonian ODE (i.e. the Hamiltonian depends on time) and we will place ourselves in a perturbative context : the Hamiltonian decomposes into an autonomous part plus a small part depending on time in a quasi-periodic way. We will show that, under assumptions of non resonances on the autonomous part, we reduce the non autonomous ODE to an autonomous ODE via a change of variables (this is called reducibility).

This result generalizes a theorem of Gaston Floquet (who considered time periodic perturbations) and its proof is based on normal form techniques of KAM type.

In the second semester, J. Bernier will consider in his course similar problems but for infinite dimensional systems (in particular PDEs).

Introduction aux systèmes de particules en interaction – Introduction to interacting particle systems (Alessandra Occelli)

Résumé : L'un des buts de la physique statistique est de décrire l'évolution de certaines grandeurs thermodynamiques d'un gaz ou d'un fluide, e.g. la densité, en analysant le mouvement de ses composants microscopiques (atomes ou molécules). Un gaz est généralement constitué d'un nombre de composants d'ordre supérieur au nombre d'Avogadro ($\sim 10^{23}$), donc pour surmonter l'énorme complexité de la dérivation de leurs lois macroscopiques, certaines simplifications ont été introduites afin de donner une description mathématique du problème. Dans les années '70, Spitzer a introduit la notion de systèmes de particules en interaction (IPS) : partant de l'hypothèse que les composantes microscopiques d'un gaz effectuent des marches aléatoires en temps continu et dans un espace discrétisé, on peut décrire les IPS comme des processus de Markov en temps continu sur certain éspaces de configuration de particules. Dans ce cours, nous utiliserons la théorie des processus de Markov pour construire la dynamique d'une classe d'IPS, appelés processus d'exclusion simples, qui évoluent par échanges de particules voisines sur un réseau discret. Le but est de dériver la loi des grands nombres de la densité des particules pour la version symétrique de ces processus : l'évolution (déterministe) de la densité est décrite par une équation aux dérivées partielles, appelée équation hydrodynamique. Si le temps le permet, nous discuterons aussi l'heuristique de la dérivation du théorème central limite pour la densité, les fluctuations d'équilibre.

Abstract : One of the goals in statistical physics is to describe the evolution of certain thermodynamical quantities of a gas or a fluid, e.g. the density, analysing the motion of its microscopic components (atoms or molecules). A gas usually consists of a number of components of order greater than the number of Avogadro ($\sim 10^{23}$), so to overcome the enorm complexity of the derivation of their macroscopic laws, some simplifications have been introduce in order to give a mathematical description of the problem. In the '70 Spitzer introduced the notion of interacting particle systems (IPS) : starting from the assumption that the microscopic components of a gas perform random walks in continuous time and in a discretized space, one can describe IPS as continuous-time Markov processes on certain spaces of configuration of particles. In this course we will use the theory of Markov processes to construct the dynamics of a class of IPS, called simple exclusion processes, which evolve by nearest-neighbor particle exchanges over a discrete lattice. The goal is to derive the law of large numbers of the particle density for the symmetric version of these processes : the (deterministic) evolution of the density is described by a partial differential equation, called the hydrodynamic equation. If time will allow it, we will discuss the heuristics of the derivation of the central limit theorem for the density, the equilibrium fluctuations.

Deuxième semestre

Formes normales de Birkhoff pour les EDPs Hamiltonniennes – Birkhoff normal forms for Hamiltonian PDEs (Joackim Bernier)

Résumé : Nous verrons comment les méthodes de formes normales de Birkhoff, introduites au premier semestre dans le cours de Benoît Grébert, peuvent être étendues à la

dimension infinie afin d'étudier le comportement en temps longs des solutions d'équations dispersives non-linéaires posées sur des domaines bornés (comme l'équation de Schrödinger non-linéaire sur le cercle). Nous nous intéressons particulièrement à la question de la stabilité de la solution nulle dans les espaces de Sobolev ou, autrement dit, à l'apparition de phénomènes de turbulence.

*Abstract :*We will see how Birkhoff normal form methods, introduced by Benoît Grébert during the first semester, can be extended to the infinite dimensional setting in order to study the long time behavior of solutions to nonlinear dispersive PDEs on bounded domains (such as the nonlinear Schrödinger equations on the circle). In particular, we will focus on the question of the stability of the small solutions in Sobolev spaces or, in other words, on the existence of turbulence phenomena.

Une introduction aux problèmes inverses spectraux (François Nicoleau)

Résumé : Les problèmes inverses sont extrêmement importants dans la pratique (scanners, radars, tomographie en imagerie médicale, astrophysique, etc...). Très souvent, ils consistent à déterminer les caractéristiques physiques d'un objet inaccessible à l'observation, à l'aide de mesures indirectes. L'expérience la plus connue est celle de Rutherford qui proposa une structure planétaire de l'atome en examinant les diffractions d'un faisceau de particules. De la même façon, les trous noirs, qui sont par essence invisibles, peuvent être étudiés en observant les déviations de la lumière des étoiles proches. On peut ainsi calculer leur masse, leur charge et la constante cosmologique de l'univers.

L'objectif principal de ce cours est d'étudier quelques problèmes inverses spectraux relativement simples. On considèrera en particulier des opérateurs de Sturm-Liouville sur l'intervalle $[0,1]$, (resp. sur $[0,+\infty[$),

$$Hu = -u'' + qu,$$

avec des conditions au bord convenables. Par exemple, si le potentiel $q \in L^2(0,1)$ et est à valeurs réelles, le spectre de Dirichlet de l'opérateur H est constitué d'une suite de valeurs propres (λ_n) qui tend vers $+\infty$ et dont l'asymptotique est bien connue. Une fois ces propriétés établies, on s'intéressera au problème dit de Borg-Levinson qui consiste à déterminer (si cela est possible) ou de caractériser les potentiels à partir du spectre de H (voire de plusieurs spectres de l'opérateur H avec différentes conditions au bord).

Pour le problème de Sturm-Liouville sur l'intervalle $[0,+\infty[$, nous définirons une fonction importante, dite fonction de Weyl-Titchmarsh, et qui est intimement liée aux données spectrales. A l'aide de techniques d'analyse complexe, nous verrons alors que le comportement asymptotique de cette fonction permet de déterminer localement le potentiel q associé.

Références bibliographiques :

— Bennewitz C., *A proof of the local Borg-Marchenko Theorem*, Comm. Math. Phys. **211**, (2001), 131-132.
— Freiling G., Yurko V., *Inverse Sturm-Liouville Problems and their Applications*, NOVA Science Publishers, New York, (2001), 305 pp.
— Gesztesy F., Simon B., *A new approach of inverse spectral theory, II. General potentials and the connection to the spectral measure*, Annals of mathematics **152**, (2000), 593-643.
— Pöschel J., Trubowitz E., *Inverse Spectral Theory*, Academic Press, Boston, 1987.
— Simon B., *A new approach to inverse spectral theory, I. Fundamental formalism*, Annals of Mathematics **150**, (1999), 1029-1057.

Introduction aux opérateurs non bornés et à la théorie spectrale — Introduction to unbounded operators and to spectral theory (Dorian Le Peutrec)

Résumé : La théorie des opérateurs non bornés sur les espaces de Hilbert de dimension infinie généralise celle des opérateurs linéaires continus, dits bornés. Elle permet notamment d'étudier les opérateurs différentiels linéaires, tels que le laplacien ou les opérateurs de Schrödinger, dont l'étude générale n'est pas couverte par la théorie des opérateurs bornés.

Dans ce cours, nous introduirons les opérateurs non bornés et leur théorie spectrale, notamment motivée par des questions de stabilité de phénomènes d'évolution modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP). Ces notions seront en particulier illustrées par de nombreux exemples issus de la théorie des EDP.

Abstract : The theory of unbounded operators on infinite-dimensional Hilbert spaces generalizes that of continuous linear operators, also called bounded operator. It allows in particular the study of linear differential operators, such as the Laplacian or the Schrödinger operators, whose general study is not covered by the theory of bounded operators.

In this course, we will introduce unbounded operators and their spectral theory, in particular motivated by questions of stability of evolution phenomena modeled by partial differential equations (PDEs). These notions will be illustrated by many examples from the theory of PDEs.